Tarea 2 - Complejidad y bifurcaciones

ME6010 - Introducción a la turbulencia
Primavera 2021. Mónica Zamora Z.

1 (35%) Un vistazo a la complejidad: sistema de Gray-Scott

El sistema de ecuaciones de Gray-Scott describe un problema de reacción y difusión. A pesar de que son ecuaciones sencillas desde el punto de vista analítico, tienen soluciones que generan diferentes patrones espaciales dependiendo de las condiciones iniciales y parámetros del sistema.

1. Escriba el sistema de ecuaciones de Gray-Scott, identificando el significado de cada término y los parámetros existentes.
2. Vea algunas animaciones/videos en internet y describa los patrones espaciales de sus soluciones.
3. Reflexione sobre cómo las estructuras espaciales de grandes escalas emergen desde una ecuación diferencial (la ecuación no "ve" el espacio entero, solo un dx, verdad?). ¿Qué semejanza tiene esto con la ecuación de Navier-Stokes y turbulencia?

En general este tipo de organización y emergencia son tópicos vistos en cursos de sistemas complejos. Turbulencia puede verse como un sistema complejo en cuanto a que tiene diferentes escalas de tiempo y espacio interactuando, hay organización y emergencia, pero en este curso no ahondaremos en mayores aspectos de sistemas complejos.

Un par de links útiles:

- `https://groups.csail.mit.edu/mac/projects/amorphous/GrayScott/`
- `https://www.mrob.com/pub/comp/xmorphia/index.html`

2 (65%) Un vistazo a bifurcaciones y caos: Mapa logístico

La ecuación logística es un modelo de crecimiento poblacional no lineal bastante sencillo, que se puede escribir como $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$, para $x \in (0, 1)$. Esta ecuación tiene una transición a un comportamiento caótico para ciertos valores de r. Veremos esto numéricamente, para lo que se pide resolver en python/matlab/otro:

1. Graficar 1000 Iteraciones de x_n para r=2
2. Graficar 1000 Iteraciones de x_n para r=3.2
3. Graficar 1000 Iteraciones de x_n para r=3.567
4. Graficar 1000 Iteraciones de x_n para r=4

¿Qué está ocurriendo a medida que aumenta r?

Ahora queremos resumir estos cambios de comportamiento en un gráfico donde la abscisa sea el parámetro $r \in (2.8, 4)$ y la ordenada la condición inicial $x_0 \in (0, 1)$, lo que se conoce como el mapa logístico. Para ello, puedes hacer lo siguiente: iterar en valores de r, y para cada uno, iterar en valores de x_0. Después de un gran número de iteraciones (1000 debería funcionar), plotear el valor final de cada x_n en el plano $r - x_0$. Mientras más fino sea el paso, más exacto es el gráfico, pero puede tomar bastante tiempo (no lo hagan si tienen que ocupar el computador).

Hay cambios notorios en los estados "posibles" de x_n para ciertos valores de r, los que se conocen como bifurcaciones. Veremos más sobre esto en clase.

Links útiles:

- `https://www.stsci.edu/~lbradley/seminar/logdiffeqn.html`
- `https://www.complexity-explorables.org/flongs/logistic/`
- Vídeo de veritasium: `https://www.youtube.com/watch?v=ovJcsL7vyrk`

Nota: Favor, no complicarse innecesariamente con esta tarea. Consultar en caso de perderse. No se requiere ir más allá de los alcances en términos de evaluación, aunque nadie les detendrá si se motivan. Buena suerte!